

第3讲二次函数与定值问题

🔗 教法备注

几何定值，是指变动的图形中某些几何元素的几何量保持不变，或几何元素间的某些几何性质或位置关系不变。

探求出定值是解定值问题的关键，这是因为，若探求出定值，则解题目标明确，定值问题就转化为一般的证明问题。

探求定值的基本方法有：

- ①特殊位置法：即从图形运动处于特殊位置时求得定值；
- ②极端位置法：即运用运动变化观点考察图形运动变化至极限位置时的定值；
- ③直接计算法：即恰当引入参数 x ，并建立与之适应的目标函数 $y=f(x)$ ，把问题转化为求解函数中的 y 和 x 无关的代数问题。

因此，若题目未给出定值，可先通过特殊位置或极限位置求得定值，再计算进行证明。

核心思路为：①设参数；②用参数表示出要求定值的式子；③消参数。因为要证明一个式子是定值，则意味着参数是不影响结果的，即参数在解式子的过程中都可以消掉。

在平面直角坐标系中，参数通常是点坐标或线段长，定值多与线段相关。其中第②步，若式子中的线段较难表示，需要先借助图形中的几何关系进行转化与变形。

常见的线段表示与转化的方法有：

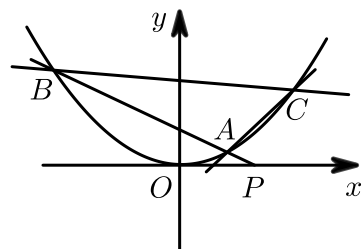
线段的表示：勾股定理（或两点间距离公式）；

线段的转化：几何变换（平移、对称、旋转）、全等或相似三角形、三角函数。

一、恒过定点

🔗 典题精练

1. 如图，抛物线解析式： $y = \frac{1}{4}x^2$ ，过点 $P(2, 0)$ 的直线交抛物线于 A 、 B 两点，过点 A 的直线 $y = x + b$ 交抛物线于另一点 C ，判断直线 BC 是否经过定点？若过定点，求出该点的坐标，若不过定点，请说明理由。



【答案】过定点 $(2, 2)$.

【解析】设 $l_{BP} : y = k(x - 2)$,

$$l_{BC} : y = mx + n ,$$

$$\text{联立} : \begin{cases} y = kx - 2k \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases} ,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - kx + 2k = 0 ,$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = 4k \text{①} \\ x_A \cdot x_B = 8k \text{②} \end{cases} ,$$

$$\text{联立} : \begin{cases} y = mx + n \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases} ,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - mx - n = 0 ,$$

$$\begin{cases} x_B + x_C = 4m \text{③} \\ x_B \cdot x_C = -4n \text{④} \end{cases} ,$$

$$\text{联立} : \begin{cases} y = x + b \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases} ,$$

$$\frac{1}{4}x^2 - x - b = 0 ,$$

$$\begin{cases} x_A + x_C = 4 \text{⑤} \\ x_A \cdot x_C = -4b \text{⑥} \end{cases} ,$$

$$\text{①} + \text{⑤} : 2x_A + x_B + x_C = 4k + 4 ,$$

$$2x_A + 4m = 4k + 4 ,$$

$$x_A = 2k - 2m + 2 ,$$

$$\text{②} + \text{⑥} : x_A(x_B + x_C) = 8k - 4b ,$$

$$x_A = \frac{2k - b}{m} ,$$

$$\because x_A + x_C = 4 ,$$

$$\therefore x_C = 2m - 2k + 2 .$$

$$\because x_B + x_A = 4k ,$$

$$\therefore x_B = 2k + 2m - 2 ,$$

$$\because x_B \cdot x_C = -4n ,$$

$$\Rightarrow (2m + 2k - 2)[2m - (2k - 2)] = -4n ,$$

$$4m^2 - 4k^2 - 4 + 8k = -4n \text{⑦} ,$$

$$\begin{aligned}
&\because x_A \cdot x_B = 8k, \\
&\therefore (2k - 2m + 2)(2k + 2m - 2) = 8k, \\
&4k^2 - (2m - 2)^2 = 8k, \\
&\therefore -(2m - 2)^2 = 8k - 4k^2 \text{ ⑧}, \\
&\text{把⑧代入⑦}, \\
&4m^2 - 4m^2 + 8m^2 - 4 - 4 = -4n, \\
&\therefore 8m - 8 = -4n, \\
&n = 2 - 2m, \\
&\therefore l_{BC}: y = mx + 2 - 2m = m(x - 2) + 2, \\
&\text{过定点}(2, 2).
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

经典再现

2. 在平面直角坐标系中，点 $O(0, 0)$ ，点 $A(1, 0)$ ，已知抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ ，（ m 是常数），顶点为 P ．
- (1) 当抛物线经过点 A 时，求顶点 P 的坐标．
- (2) 若点 P 在 x 轴下方，当 $\angle AOP = 45^\circ$ 时，求抛物线的解析式．
- (3) 无论 m 取何值，该抛物线都经过定点 H ，当 $\angle AHP = 45^\circ$ 时，求抛物线的解析式．

【答案】(1) 顶点 P 的坐标 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ ．

(2) 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 10x + 20$ ．

(3) 抛物线的解析式为 $y = x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{28}{5}$ 或 $y = x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{44}{3}$ ．

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ 经过点 $A(1, 0)$ ，

$$\therefore 0 = 1 + m - 2m, \text{ 解得 } m = 1,$$

$$\therefore \text{ 抛物线的解析式为 } y = x^2 + x - 2,$$

$$\therefore y = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

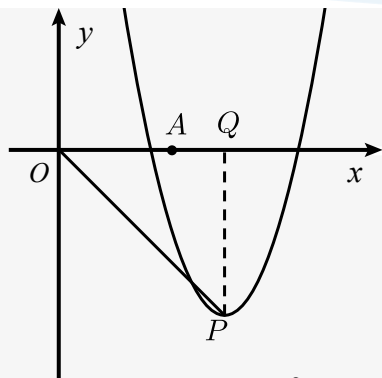
$$\therefore \text{ 顶点 } P \text{ 的坐标 } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$

(2) 抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ 的顶点 P 的坐标为 $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2 + 8m}{4}\right)$ ，

由点 $A(1, 0)$ 在 x 轴正半轴上，点 P 在 x 轴下方， $\angle AOP = 45^\circ$ ，

知点 P 在第四象限，

过点 P 作 $PQ \perp x$ 轴于点 Q ，则 $\angle POQ = \angle OPQ = 45^\circ$ ，



可知 $PQ = OQ$ ，即 $\frac{m^2 + 8m}{4} = -\frac{m}{2}$ ，

解得 $m_1 = 0$ ， $m_2 = -10$ ，

当 $m = 0$ 时，点 P 不在第四象限，舍去，

$\therefore m_2 = -10$ ，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 10x + 20$ 。

(3) 由 $y = x^2 + mx - 2m = x^2 + (x - 2)m$ 可知，

当 $x = 2$ 时，无论 m 取何值， y 都等于 4，

得点 H 的坐标为 $(2, 4)$ ，

过点 A 作 $AD \perp AH$ 交射线 HP 于点 D ，

分别过 D, H 作 x 轴的垂线，垂足分别为 E

， G ，

则 $\angle DEA = \angle AGH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DAH = 90^\circ$ ， $\angle AHD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ADH = 45^\circ$ ，

$\therefore AH = AD$ ，

$\therefore \angle DAE + \angle HAG = \angle AHG + \angle HAG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle AHG$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle HAG$ ，

$\therefore DE = AG = 1$ ， $AE = HG = 4$ ，

可得点 D 的坐标为 $(-3, 1)$ 或 $(5, -1)$ ，

① 当点 D 的坐标为 $(-3, 1)$ 时，

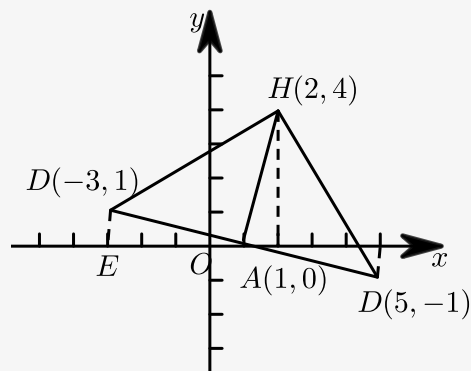
可得直线 DH 的解析式为 $y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$ ，

$\therefore$ 点 $P\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2 + 8m}{4}\right)$ 在直线 $y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$ 上，

$\therefore -\frac{m^2 + 8m}{4} = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{m}{2}\right) + \frac{14}{5}$ ，

解得 $m_1 = -4$ ， $m_2 = -\frac{14}{5}$ ，

当 $m_1 = -4$ 时，当 P 与 H 重合，不符合题意，



$$\therefore m_2 = -\frac{14}{5},$$

②当点 D 的坐标为 $(5, -1)$ 时,

可得直线 DH 的解析式为 $y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3}$,

$\therefore$ 点 $P\left(-\frac{m}{2}, -\frac{m^2+8m}{4}\right)$ 在直线 $y = -\frac{5}{3}x + \frac{22}{3}$ 上,

$$\therefore -\frac{m^2+8m}{4} = \frac{5}{3} \times \left(-\frac{m}{2}\right) + \frac{22}{3},$$

解得 $m_1 = -4$ (舍), $m_2 = -\frac{22}{3}$,

$$\therefore m_2 = -\frac{22}{3},$$

综上, $m = -\frac{14}{5}$ 或 $m = \frac{22}{3}$,

故抛物线的解析式为 $y = x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{28}{5}$ 或 $y = x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{44}{3}$.

【标注】【知识点】二次函数解析式间转化

【知识点】二次函数顶点式

【知识点】二次函数一般式

【能力】运算能力

【思想】分类讨论思想

二、单线段定值

典题精练

3. 如图, 已知抛物线 $y = -x^2 + mx + m - 2$ 的顶点为 A , 且经过点 $B(3, -3)$.

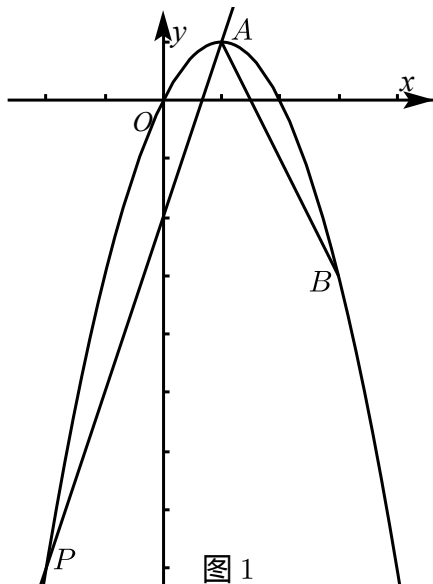


图 1

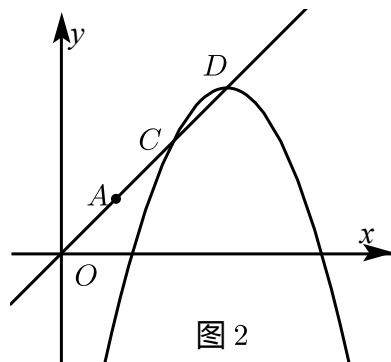


图 2

(1) 求抛物线的解析式.

- (2) 在对称轴左侧的抛物线上存在一点 P ，使得 $\angle PAB = 45^\circ$ ，求点 P 坐标。
- (3) 如图2，将原抛物线沿射线 OA 方向进行平移得到新的抛物线，新抛物线与射线 OA 交于 C 、 D 两点，请问：在抛物线平移的过程中，线段 CD 的长度是否为定值？若是，请求出这个定值；若不是，请说明理由。

【答案】(1) $y = -x^2 + 2x$.

(2) $P(-2, -8)$.

(3) 在抛物线平移的过程中，线段 CD 的长度是定值， $CD = \sqrt{2}$.

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + mx + m - 2$ 经过点 $B(3, -3)$,

$$\therefore \text{代入得: } -3 = -9 + 3m + m - 2 ,$$

$$\therefore m = 2 ,$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x .$$

(2) 过 AP 上一点 Q 作 $QB \perp AB$ 于 B ，过 B 作 y 轴的平行线 MN ，过 Q 作 $QM \perp MN$ 于 M ，过 A 作 $AN \perp MN$ 于 N ，

$$\because \angle PAB = 45^\circ ,$$

$\therefore \triangle ABQ$ 为等腰直角三角形，

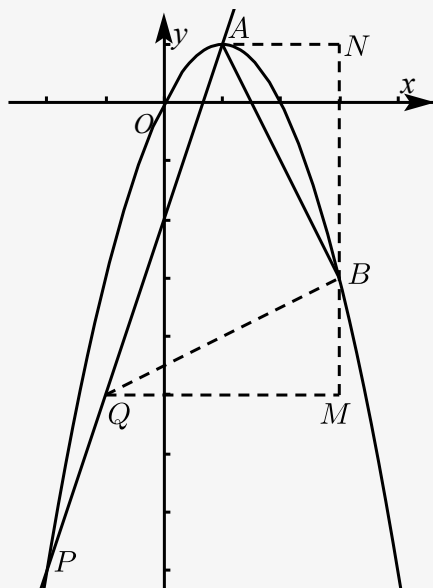
$$\therefore \triangle ANB \cong \triangle BMQ ,$$

$$\therefore QM = BN = 2, QM = NB = 4 ,$$

$$\therefore Q(-1, -5) ,$$

$$\therefore \text{直线 } AP : y = 3x - 2 ,$$

$$\text{联立得: } P(-2, -8) .$$



(3) 在抛物线平移的过程中，线段 CD 的长度是为定值，

$$\therefore \text{直线 } OA \text{ 的解析式为 } y = x ,$$

$$\therefore \text{可设新抛物线为 } y = -(x - a)^2 + a ,$$

联立得新抛物线与 OA 得：

$$\therefore -(x - a)^2 + a = x ,$$

$$\therefore x_1 = a, x_2 = a - 1, x_1 - x_2 = 1, y_1 x_1 = a, y_2 = x_2 = a - 1 ,$$

$$y_1 - y_2 = 1 ,$$

即 C 、 D 两点横坐标的差是常数 1， C 、 D 两点的纵坐标差为常数 1，

$$\therefore CD = \sqrt{2} ,$$

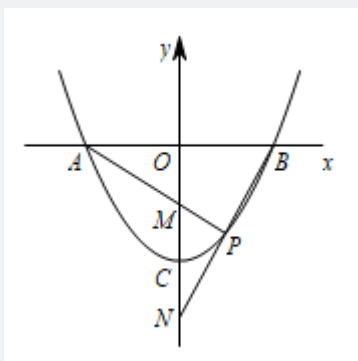
$\therefore$ 在抛物线平移的过程中，线段 CD 的长度是定值。

三、线段和差定值

教法备注

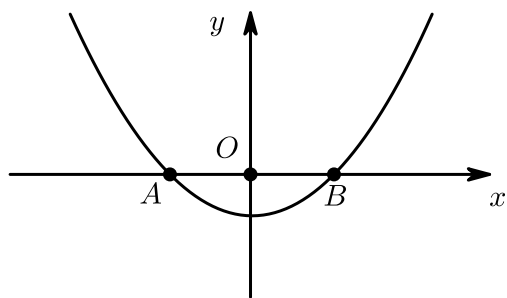
对称轴上的定值问题

如图，抛物线 $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0, c)$ ，点 P 为抛物线 A, B 之间的部分上的一点，直线 PA, PB 分别与 y 轴交于 M, N 两点，则 $OM + ON = 2|c|$ 。



典题精练

4. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (A 在 B 的左侧)，点 P 是抛物线上一动点 (不包括 A, B)， $PM \perp x$ 轴于点 M ，点 P 的横坐标为 t 。



- (1) 若 $-1 < t < 1$ ，求证： $OP + PM$ 为定值，并求出该值。
 (2) 若 $t < -1$ 或 $t > 1$ ，求证： $OP - PM$ 为定值，并求出该值。

【答案】(1) 1.

(2) 1.

【解析】(1) 依题意得： $P\left(t, \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)$ ，

$$\therefore OP + PM = \sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 = 1$$

故答案为：1.

$$(2) OP - PM = \sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)^2} - \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} = 1$$

故答案为：1.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

5. 抛物线 $y = ax^2 + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，顶点为 C ，点 P 在抛物线上，且位于 x 轴下方.

(1) 如图1，若 $P(1, -3)$ 、 $B(4, 0)$ ，

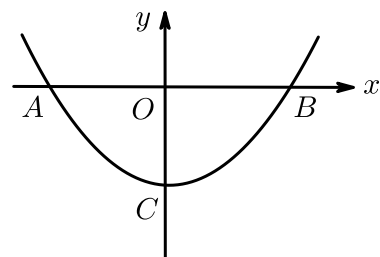


图 1

① 求该抛物线的解析式；

② 若 D 是抛物线上一点，满足 $\angle DPO = \angle POB$ ，求点 D 的坐标；

(2) 如图2，在(1)中的抛物线解析式不变的条件下，已知直线 PA 、 PB 与 y 轴分别交于 E 、 F 两点，点 P 运动时， $OE + OF$ 是否为定值？若是，试求出该定值；若不是，请说明理由.

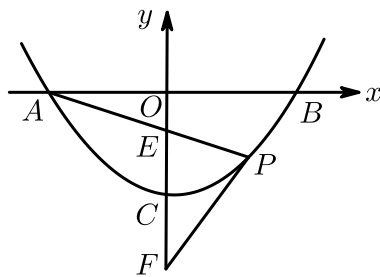


图 2

【答案】 (1) ① $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{16}{5}$.

② $(-1, -3)$ 或 $\left(\frac{11}{4}, -\frac{27}{16}\right)$.

(2) 是定值， $\frac{32}{5}$ ，理由见解析.

【解析】 (1) ①

将 $P(1, -3)$, $B(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + c$, 得 $\begin{cases} 16a + c = 0 \\ a + c = -3 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ c = -\frac{16}{5} \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{16}{5}$.

② 如图1,

当点 D 在 OP 左侧时, 连接 DP , OP ,

由 $\angle DPO = \angle POB$, 得 $DP \parallel OB$,

$\therefore D$ 与 P 关于 y 轴对称, 且 $P(1, -3)$,

$\therefore D(-1, -3)$.

当点 D 在 OP 右侧时, 延长 PD 交 x 轴于点 G .

作 $PH \perp OB$ 于点 H , 则 $OH = 1$, $PH = 3$.

$\therefore \angle DPO = \angle POB$,

$\therefore PG = OG$.

设 $OG = x$, 则 $PG = x$, $HG = x - 1$.

在 $Rt\triangle PGH$ 中, 由 $x^2 = (x - 1)^2 + 3^2$, 得 $x = 5$.

$\therefore$ 点 $G(5, 0)$.

$\therefore$ 直线 PG 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$,

解方程组 $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} \\ y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{16}{5} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = -\frac{27}{16} \end{cases}$.

$\therefore P(1, -3)$,

$\therefore D\left(\frac{11}{4}, -\frac{27}{16}\right)$.

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-1, -3)$ 或 $\left(\frac{11}{4}, -\frac{27}{16}\right)$.

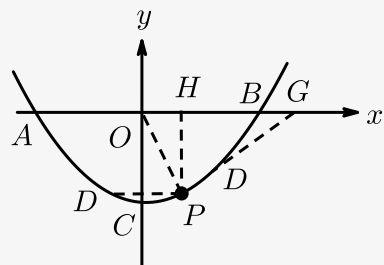


图 1

(2) 点 P 运动时, $OE + OF$ 是定值, 理由如下:

如图2, 作 $PQ \perp AB$ 于 Q 点,

设 $P(m, am^2 + c)$, $A(-t, 0)$, $B(t, 0)$, 则

$at^2 + c = 0$, $c = -at^2$.

$\therefore PQ \parallel OF$,

$\therefore \frac{PQ}{OF} = \frac{BQ}{BO}$,

$\therefore$

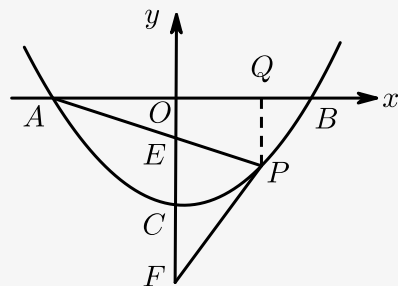


图 2

$$OF = \frac{PQ \cdot BO}{BQ} = \frac{-(am^2 + c)t}{t - m} = \frac{(am^2 - at^2)t}{m - t} = amt + at^2.$$

$$\text{同理 } OE = -amt + at^2,$$

$$\therefore OE + OF = 2at^2 = -2c = 2OC = \frac{32}{5}.$$

【标注】【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

【知识点】二次函数与角度问题

【知识点】二次函数一般式

【知识点】比例线段的性质

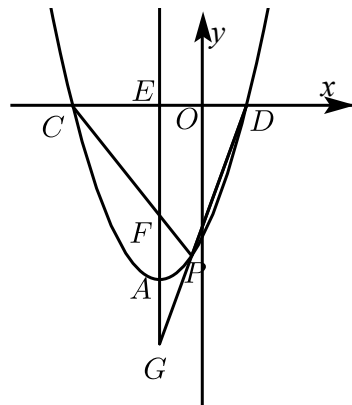
【知识点】比例的综合应用

【思想】函数思想

6. 已知，在以 O 为原点的直角坐标系中，抛物线的顶点为 $A(-1, -4)$ ，且经过点 $B(-2, -3)$ ，与 x 轴分别交于 C 、 D 两点。

(1) 直线 OB 以及该抛物线相应的函数表达式分别是 _____，_____。

(2) 如图，过点 A 的直线交 x 轴于点 E ，且 $AE \parallel y$ 轴，点 P 是抛物线上 A 、 D 之间的一个动点，直线 PC 、 PD 与 AE 分别交于 F 、 G 两点。当点 P 运动时， $EF + EG$ 是否为定值？若是，试求出该定值；若不是，请说明理由。

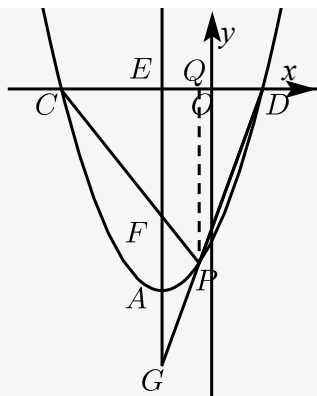


【答案】(1) $y = \frac{3}{2}x$; $y = x^2 + 2x - 3$

(2) $EF + EG = 8$. 理由见解析。

【解析】(1) 设直线 OB 的解析式为 $y = kx$ ，由题意可得 $-3 = -2k$ ，解得 $k = \frac{3}{2}$ ，故直线 OB 的解析式为 $y = \frac{3}{2}x$ 。∵ 抛物线顶点坐标为 $(-1, -4)$ ，∴ 可设抛物线解析式为 $y = a(x + 1)^2 - 4$ 。又抛物线经过点 $B(-2, -3)$ ，∴ $-3 = a - 4$ ，解得 $a = 1$ 。∴ 抛物线解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$ 。

(2) 如图，过点 P 作 $PQ \parallel y$ 轴交 x 轴于 Q ，



在 $y = x^2 + 2x - 3$ 中, 令 $y = 0$,

可得 $0 = x^2 + 2x - 3$, 解得 $x = -3$ 或 $x = 1$,

$\therefore C(-3, 0)$, $D(1, 0)$.

设 $P(t, t^2 + 2t - 3)$, 则 $PQ = -t^2 - 2t + 3$,

$CQ = t + 3$, $DQ = 1 - t$,

$\therefore PQ \parallel EF$,

$\therefore \triangle CEF \sim \triangle CQP$,

$$\therefore \frac{EF}{PQ} = \frac{CE}{CQ},$$

$$\therefore EF = \frac{CE}{CQ} \cdot PQ = \frac{2}{t+3}(-t^2 - 2t + 3)$$

同理 $\triangle EGD \sim \triangle QPD$, 得 $\frac{EG}{PQ} = \frac{DE}{DQ}$,

$$\therefore EG = \frac{DE}{DQ} \cdot PQ = \frac{2}{1-t}(-t^2 - 2t + 3)$$

$\therefore EF + EG$

$$= \frac{2}{t+3}(-t^2 - 2t + 3) + \frac{2}{1-t}(-t^2 - 2t + 3) = 2(-t^2 - 2t + 3) \left(\frac{1}{t+3} + \frac{1}{1-t} \right)$$

$$= 2(-t^2 - 2t + 3) \left[\frac{1-t+t+3}{(t+3)(1-t)} \right]$$

$$= 2(-t^2 - 2t + 3) \left(\frac{4}{(-t^2 - 2t + 3)} \right)$$

$$= 8$$

$\therefore$ 当点 P 运动时, $EF + EG$ 为定值 8.

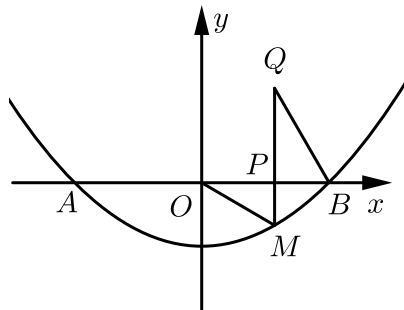
【标注】【知识点】二次函数与动点问题

四、周长、面积定值

 典题精练

7.

已知二次函数 $y = ax^2 + c$ ($a > 0, c < 0$)，与 x 轴交于 A, B 两点， P 是线段 OB (不含端点) 上任意一点， $PM \perp x$ 轴交抛物线于点 M ， $\angle OBQ = \angle OMP$ ， BQ 交直线 PM 于点 Q ，问当 a, c 有何数量关系时 (只写一种情况即可)， $\triangle PBQ$ 的周长为定值，并求出该值 (用 a 表示)。



【答案】 $\frac{1}{a}$.

【解析】 设 $M(x_0, ax_0^2 + c)$ ，则 $P(x_0, 0)$ ， $OP = x_0$ ， $PM = -ax_0^2 - c$ ，
 $OM = \sqrt{OP^2 + PM^2} = \sqrt{a^2x_0^4 + 2ax_0^2 + c^2 + x_0^2} = \sqrt{a^2x_0^4 + (2ac + 1)x_0^2 + c^2}$ ，
 若要 $a^2x_0^4 + (2ac + 1)x_0^2 + c^2$ 为完全平方式，参数未知， a, c 重构解析式，
 则可： $2ac + 1 = 2ac$ ， $OM = \sqrt{(ax_0^2 - c)^2} = |ax_0^2 - c| = ax_0^2 - c$ ，
 下面验证：当 $2ac + 1 = -2ac$ ，即 $ac = -\frac{1}{4}$ 时， $C_{\triangle PBQ}$ 是否为定值。
 $C_{\triangle OPM} = x_0 - ax_0^2 - c + ax_0^2 - c = x_0 - 2c$ ， $B\left(\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$ ， $PB = \sqrt{\frac{-c}{a}} - x_0$ ，
 $\frac{C_{\triangle QPB}}{C_{\triangle OPM}} = \frac{\sqrt{PB}x_0}{PM}$ ， $\therefore \frac{C_{\triangle QPB}}{C_{\triangle OPM}} = \frac{\frac{1}{2a} - x_0}{-ax_0^2 + \frac{1}{4a}}$ ， $\frac{C_{\triangle QPB}}{C_{\triangle OPM}} = \frac{\frac{1}{2a} - x_0}{-ax_0^2 + \frac{1}{4a}}$ ，
 $\therefore C_{\triangle QPB} = \frac{1}{a}$.
 故答案为： $\frac{1}{a}$.

【标注】 【知识点】二次函数与动点问题

8. 已知抛物线 $y = x^2 - 2mx + 4m - 8$ 的顶点为 A .

(1) 求证：该抛物线与 x 轴总有两个交点 .

(2) 当 $m = 1$ 时，直线 $BC: y = kx - 2$ 与该抛物线交于 B, C 两点，若线段 BC 被 x 轴平分，求 k 的值 .

(3) 以 A 为一个顶点作该抛物线的内接正三角形 AMN (M, N 两点在抛物线上)，请问：
 $\triangle AMN$ 的面积是与 m 无关的定值吗？若是，请求出这个定值；若不是，请说明理由 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

$$(2) k = -1 \pm \sqrt{5}.$$

$$(3) S_{\triangle AMN} = 3\sqrt{3}.$$

【解析】(1) $\because \Delta = (-2m)^2 - 4(4m - 8)$

$$= 4m^2 - 16m + 32$$

$$= 4(m - 2)^2 + 16 > 0,$$

$\therefore$ 该抛物线与 x 轴总有两个交点.

$$(2) \text{ 当 } m = 1 \text{ 时 } y = x^2 - 2x - 4,$$

$$\text{设 } B(x_1, y_1), C(x_2, y_2),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = x^2 - 2x - 4 \\ y = kx - 2 \end{cases},$$

$$\text{得: } x^2 - (2 + k)x - 2 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2 + k,$$

$\therefore$ 线段 BC 被 x 轴平分,

$$\therefore y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) - 4 = 0,$$

$$\therefore k^2 + 2k - 4 = 0,$$

$$\text{解得 } k = -1 \pm \sqrt{5}.$$

$$(3) \because y = x^2 - 2mx + 4m - 8$$

$$= (x - m)^2 - m^2 + 4m - 8,$$

$$\therefore A(m, -m^2 + 4m - 8),$$

$\therefore \triangle AMN$ 是正三角形,

$\therefore MN$ 垂直于对称轴于点 B ,

$$\text{设 } M(a, a^2 - 2ma + 4m - 8),$$

$$\therefore AB = \sqrt{3}BM,$$

$$\therefore a^2 - 2ma + 4m - 8 - (-m^2 + 4m - 8) = \sqrt{3}(m - a),$$

$$\text{化简得 } (m - a)^2 = \sqrt{3}(m - a),$$

$$\text{又 } \because m \neq a,$$

$$\therefore m - a = \sqrt{3},$$

$$\therefore MN = 2\sqrt{3}, AB = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}.$$

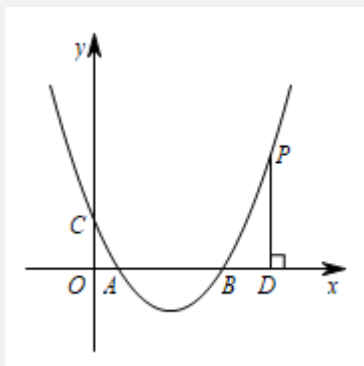
【标注】【知识点】二次函数与面积

五、比例定值

教法备注

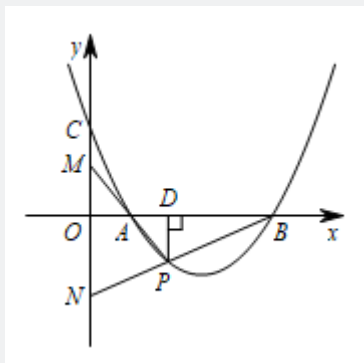
x 轴上的定值问题

如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0, c)$ ，点 P 为抛物线在 x 轴上方的部分上的一点， $PD \perp x$ 轴于点 D ，则 $\frac{PD}{AD \cdot BD} = |a|$ 。



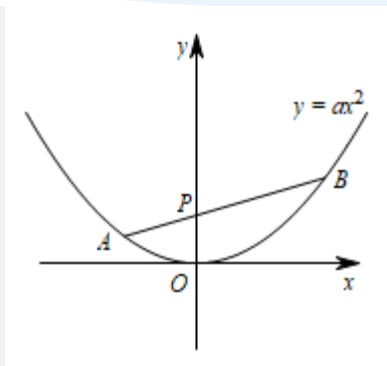
y 轴上的定值问题

如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0, c)$ ，点 P 为抛物线 A, B 之间的部分上的一点，直线 PA, PB 分别与 y 轴交于 M, N 两点， $PD \perp x$ 轴于点 D ，则 $\frac{OM \cdot ON}{OC \cdot PD} = 1$ 。



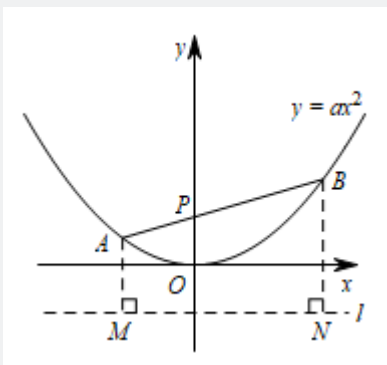
与焦点准线相关的定值问题

如图，抛物线 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的焦点为点 $F(0, \frac{1}{4a})$ ，过点 P 且与 y 轴不平行的任一直线与抛物线交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点，则① $\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = 4a$ ；② $\frac{OP \cdot AB}{PA \cdot PB} = 1$ 。



【推导】

作抛物线 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的准线 l ，过点 A 作 $AM \perp l$ 于点 M ，过点 B 作 $BN \perp l$ 于点 N ，根据抛物线的定义可知： $PA = AM$ ， $PB = BN$ 。



$$\therefore PA = AM = y_1 + \frac{1}{4a} = ax_1^2 + \frac{1}{4a} = \frac{4a^2x_1^2 + 1}{4a},$$

$$\text{同理 } PB = \frac{4a^2x_2^2 + 1}{4a},$$

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + \frac{1}{4a}$ ，联立解析式：

$$\begin{cases} y = kx + \frac{1}{4a} \\ y = ax^2 \end{cases}$$

消去 y ，得： $ax^2 - kx - \frac{1}{4a} = 0$ ，

$$\therefore x_1x_2 = -\frac{1}{4a^2}.$$

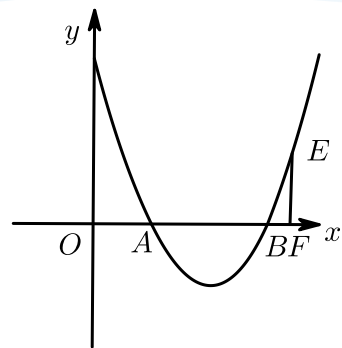
$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} &= \frac{4a}{4a^2x_1^2 + 1} + \frac{4a}{4a^2x_2^2 + 1} = 4a \cdot \left(\frac{1}{4a^2x_1^2 + 1} + \frac{1}{4a^2x_2^2 + 1} \right) \\ &= 4a \cdot \frac{4a^2x_1^2 + 1 + 4a^2x_2^2 + 1}{(4a^2x_1^2 + 1)(4a^2x_2^2 + 1)} = 4a \cdot \frac{4a^2(x_1^2 + x_2^2) + 2}{16a^2x_1^2x_2^2 + 4a^2(x_1^2 + x_2^2) + 1} = 4a. \end{aligned}$$

$$\text{又} \because OP = \frac{1}{4a},$$

$$\therefore \frac{OP \cdot AB}{PA \cdot PB} = OP \cdot \frac{AB}{PA \cdot PB} = OP \cdot \frac{PA + PB}{PA \cdot PB} = OP \cdot \left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} \right) = \frac{1}{4a} \cdot 4a.$$

典题精练1

9. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 左)，点 E 为抛物线上一动点，作 $EF \perp x$ 轴于 F ，试证明： $\frac{EF}{AF \cdot BF}$ 的值是一个定值。



【答案】证明见解析．

【解析】记 $y = a(x - m)(x - n)$ ，则 $A(m, 0)$ ， $B(n, 0)$ ，

设 $E(t, a(t - m)(t - n))$ ， $F(t, 0)$ ，

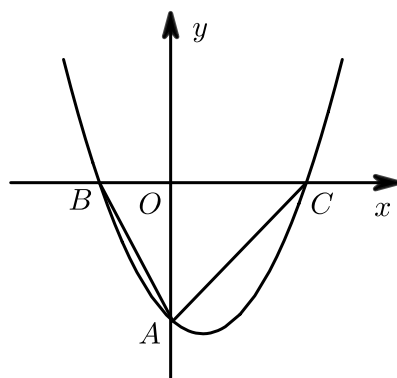
则 $AF = |t - m|$ ， $BF = |t - n|$ ， $EF = |a(t - m)(t - n)|$ ，

所以 $\frac{EF}{AF \cdot BF} = \frac{|a(t - m)(t - n)|}{|t - m| \cdot |t - n|} = |a|$ ，

抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $l: y = h$ 交于 A 、 B 两点（ A 在 B 左），点 E 为抛物线上一点，作 $EF \perp l$ 于 F ，试证明： $\frac{EF}{AF \cdot BF}$ 的值是一个定值．

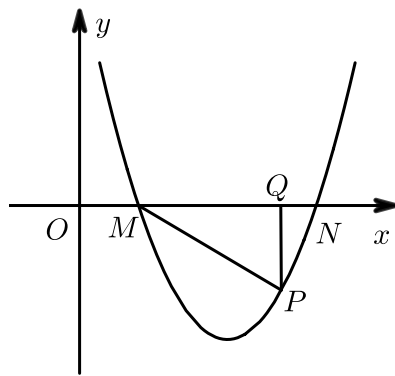
【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

10. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 y 轴交于点 $A(0, -4)$ ，与 x 轴相交于 $B(-2, 0)$ 、 $C(4, 0)$ 两点， O 为坐标原点．



(1) 求抛物线的解析式．

(2) 如图，将抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 向右平移 $n(n > 0)$ 个单位得到的新抛物线与 x 轴交于 M 、 N （ M 在 N 左侧）， P 为 x 轴下方的新抛物线上任意一点，连 PM 、 PN ，过 P 作 $PQ \perp MN$ 于 Q ， $\frac{PQ}{MQ} + \frac{PQ}{NQ}$ 是否为定值？请说明理由．



【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$.

(2) 是定值, 证明见解析.

【解析】(1)

(2) 为定值;

平移后, 解析式为 $y = \frac{1}{2}(x + 2 - n)(x - 4 - n)$, 点 $M(-2 + n, 0)$,
点 $N(4 + n, 0)$. 设 $P\left(t, \frac{1}{2}(t + 2 - n)(t - 4 - n)\right)$,

则 $PQ = \frac{1}{2}(t + 2 - n)(t - 4 - n)$,

$MQ = t - (-2 - n) = t + 2 - n$, $NQ = 4 + n - t$,

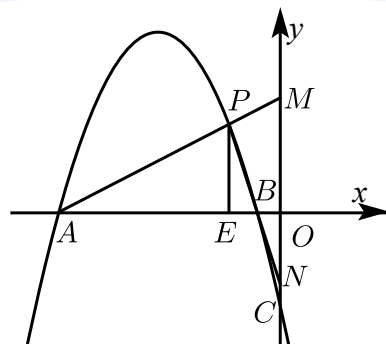
$\therefore \frac{PQ}{MQ} + \frac{PQ}{NQ}$

$$= \frac{\frac{1}{2}(t + 2 - n)(t - 4 - n)}{t + 2 - n} + \frac{\frac{1}{2}(t + 2 - n)(t - 4 - n)}{4 + n - t} = \frac{1}{2}(t - 4 - n) - \frac{1}{2}(t + 2 - n) = 3.$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

典题精练2

11. 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 与 y 轴负半轴交于 C , 与 x 轴负半轴交于 A 、 B 两点, M 是 y 轴正半轴上一点, 连 AM 交抛物线于 P , 过 P 作 $PE \perp x$ 轴于 E , 连 PB 并延长交 y 轴于 N , $\frac{OM \cdot ON}{PE \cdot OC}$ 的值是否为定值.



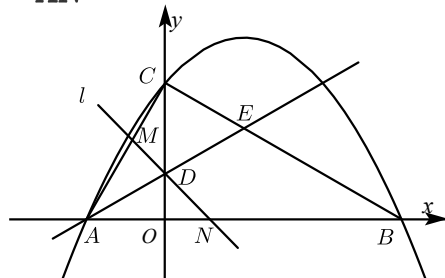
【答案】是.

【解析】设 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$ ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，
 $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = a(x - x_1)(x - x_2)$ ，
 设 $P(x_0, a(x_0 - x_1)(x_0 - x_2))$ ， $k_{PA} = a(x_0 - x_2)$ ， $AP: y = a(x_0 - x_2)(x - x_1)$ ，
 $y_M = -ax_1(x_0 - x_2)$ ， $k_{BP} = a(x_0 - x_1)$ ， $\therefore BP: y = a(x_0 - x_1)(x - x_2)$ ，
 $y_N = -ax_2(x_0 - x_1)$ ， $OM \cdot ON = y_M(-y_N) = -a^2 x_1 x_2 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ ，
 $PE \cdot OC = y_P(-y_C) = -a^2 x_1 x_2 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ ，
 $\therefore \frac{OM \cdot ON}{PE \cdot OC} = 1$ 。
 故答案为：是.

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

典题精练3

12. 已知：如图，抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}x + 3$ 与坐标轴交于 A, B, C 三点，点 A 在点 B 左侧，点 C 为抛物线与 y 轴的交点， $\angle BAC$ 的平分线 AE 交 y 轴于点 D ，交 BC 于点 E ，过点 D 的直线 l 与射线 AC ， AB 分别交于点 M, N 。证明：当直线 l 绕点 D 旋转时， $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$ 均为定值，并求出该定值。



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，证明见解析。

【解析】设直线 AC 的表达式为 $y = mx + 3$ 。

将点 A 的坐标代入得 $-\sqrt{3}m + 3 = 0$ ，

解得 $m = \sqrt{3}$,

所以直线 AC 的表达式为 $y = \sqrt{3}x + 3$.

所以 $\angle CAO = 60^\circ$, $D(0, 1)$.

设直线 MN 的表达式为 $y = kx + 1$,

所以点 N 的坐标为 $(-\frac{1}{k}, 0)$,

所以 $AN = -\frac{1}{k} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}k - 1}{k}$.

将 $y = \sqrt{3}x + 3$ 与 $y = kx + 1$ 联立得 $x = \frac{2}{k - \sqrt{3}}$,

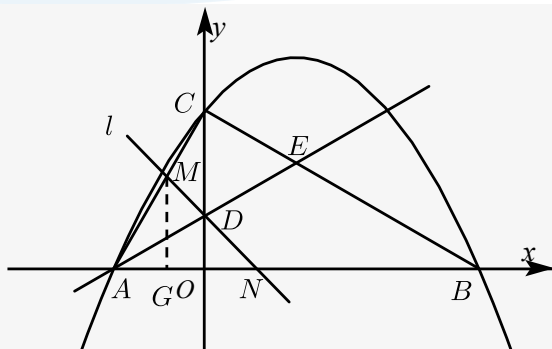
所以点 M 的横坐标为 $\frac{2}{k - \sqrt{3}}$.

过点 M 作 $MG \perp x$ 轴, 垂足为 G , 则 $AG = \frac{2}{k - \sqrt{3}} + \sqrt{3}$.

因为 $\angle MAG = 60^\circ$, $\angle AGM = 90^\circ$,

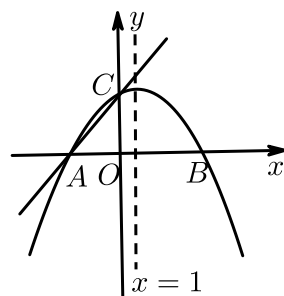
所以 $AM = 2AG = \frac{4}{k - \sqrt{3}} + 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}k - 2}{k - \sqrt{3}}$.

故 $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{k - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}k - 2} + \frac{k}{\sqrt{3}k - 1} = \frac{3k - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}k - 2} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}k - 1)}{2(\sqrt{3}k - 1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

13. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = \frac{5}{4}x + m$ (m 为常数) 的图象与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 C . 以直线 $x = 1$ 为对称轴的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, 且 $a \neq 0$) 经过 A, C 两点, 并与 x 轴的正半轴交于点 B .



- (1) 求 m 的值及抛物线的函数表达式.
- (2) 若 P 是抛物线对称轴上使 $\triangle ACP$ 的周长取得最小值的点, 过点 P 任意作一条与 y 轴不平行的直线交抛物线于 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 两点, 试探究 $\frac{M_1P \cdot M_2P}{M_1M_2}$ 是否为定值, 并写出探究过程.

【答案】 (1) $m = \frac{15}{4}$, $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}$.

$$(2) \frac{M_1P \cdot M_2P}{M_1M_2} = 1.$$

【解析】(1) $\because y = \frac{5}{4}x + m$ 经过点 $(-3, 0)$,

$$\therefore 0 = -\frac{15}{4} + m, \text{ 解得 } m = \frac{15}{4}.$$

$$\therefore \text{直线解析式为 } y = \frac{5}{4}x + \frac{15}{4}, C(0, \frac{15}{4}).$$

$\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 对称轴为 $x = 1$, 且与 x 轴交于 $A(-3, 0)$,

$\therefore$ 另一交点为 $B(5, 0)$,

设抛物线解析式为 $y = a(x+3)(x-5)$,

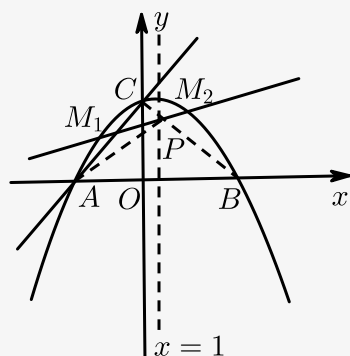
$\because$ 抛物线经过 $C(0, \frac{15}{4})$,

$$\therefore \frac{15}{4} = a \cdot 3 \times (-5), \text{ 解得 } a = -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{4}.$$

(2) 要使 $\triangle ACP$ 的周长最小, 只需 $AP + CP$ 最小即可.

如答图2, 连接 BC 交 $x = 1$ 于 P 点, 因为点 A 、 B 关于 $x = 1$ 对称, 根据轴对称性质以及两点之间线段最短, 可知此时 $AP + CP$ 最小 ($AP + CP$ 最小值为线段 BC 的长度).



答图 2

$$\therefore B(5, 0), C(0, \frac{15}{4}),$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 解析式为 } y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}.$$

$$\therefore x_P = 1, \therefore y_P = 3, \text{ 即 } P(1, 3).$$

令经过点 $P(1, 3)$ 的直线为 $y = kx + b$, 则 $k + b = 3$, 即 $b = 3 - k$,

则直线的解析式是: $y = kx + 3 - k$,

$$\therefore y = kx + 3 - k, y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{4},$$

$$\text{联立化简得: } x^2 + (4k - 2)x - 4k - 3 = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2 - 4k, x_1x_2 = -4k - 3.$$

$$\therefore y_1 = kx_1 + 3 - k, y_2 = kx_2 + 3 - k,$$

$$\therefore y_1 - y_2 = k(x_1 - x_2).$$

根据两点间距离公式得到:

$$\begin{aligned}
M_1 M_2 &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + k^2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \\
&\cdot \\
&\therefore \\
M_1 M_2 &= \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(2 - 4k)^2 - 4(-4k - 3)} = 4(1 + k^2) \\
&\cdot \\
M_1 P &= \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 3)^2} = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (kx_1 + 3 - k - 3)^2} = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 - 1)^2} \\
&\cdot \\
\text{同理 } M_2 P &= \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_2 - 1)^2} . \\
&\therefore \\
M_1 P \cdot M_2 P &= (1 + k^2) \sqrt{(x_1 - 1)^2 (x_2 - 1)^2} = (1 + k^2) \cdot \sqrt{[x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1]^2} \\
&= (1 + k^2) \sqrt{[-4k - 3 - (2 - 4k) + 1]^2} = 4(1 + k^2) \\
&\therefore M_1 P \cdot M_2 P = M_1 M_2 , \\
&\therefore \frac{M_1 P \cdot M_2 P}{M_1 M_2} = 1 \text{ 为定值} .
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

典题精练4

14. 已知点 $A(1, \frac{1}{2})$ 在抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$, 点 $F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 在它的对称轴上, 点 P 为抛物线上一动点.
- (1) 求这条抛物线的函数解析式.
 - (2) 判断是否存在直线 l , 使得线段 PF 的长总是等于点 P 到直线 l 的距离, 需说明理由.
 - (3) 设直线 PF 与抛物线的另一交点为 Q , 探究: PF 和 QF 这两条线段的倒数和是否为定值? 证明你的结论.

【答案】(1) 抛物线的解析式是 $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$.

(2) 存在符合题意的直线 l , 理由见解析.

(3) 是定值, 证明见解析.

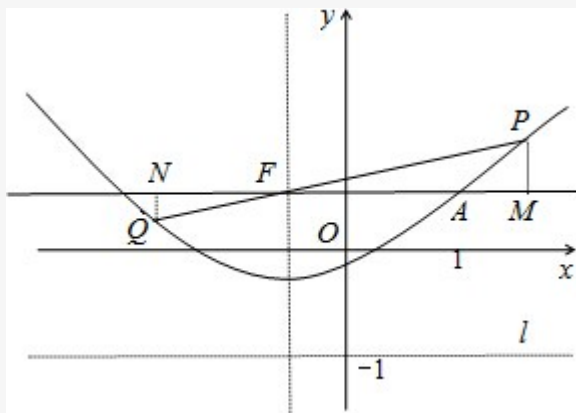
【解析】(1) 由 $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{3}$, 得 $b = \frac{1}{3}$,

把 $b = \frac{1}{3}$ 和点 $A(1, \frac{1}{2})$ 代入 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$, 可求得 $c = -\frac{1}{6}$.

$\therefore$ 这条抛物线的解析式是 $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}$.

(2) 设点 $P(x_0, y_0)$, 则 $y_0 = \frac{1}{3}x_0^2 + \frac{1}{3}x_0 - \frac{1}{6}$.

作 $PM \perp AF$ 于 M ，得 $PF^2 = PM^2 + MF^2 = (x_0 + \frac{1}{2})^2 + (y_0 - \frac{1}{2})^2$ ，



$$\text{又} \because y_0 = \frac{1}{3}x_0^2 + \frac{1}{3}x_0 - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(x_0 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4},$$

$$\therefore (x_0 + \frac{1}{2})^2 = 3y_0 + \frac{3}{4},$$

$$\therefore PF^2 = 3y_0 + \frac{3}{4} + (y_0 - \frac{1}{2})^2 = (y_0 + 1)^2.$$

易知 $y_0 \geq -\frac{1}{4}$ ， $y_0 + 1 > 0$ ，

$$\therefore PF = y_0 + 1.$$

又 $\because$ 当直线 l 经过点 $(0, -1)$ 且与 x 轴平行时， $y_0 + 1$ 即为点 P 到直线 l 的距离。

$\therefore$ 存在符合题意的直线 l 。

(3) 是定值。证明如下：

$$\text{当 } PF \parallel x \text{ 轴时，} PF = QF = \frac{3}{2}, \frac{1}{PF} + \frac{1}{QF} = \frac{4}{3}.$$

当 PF 与 x 轴不平行时，作 $QN \perp AF$ 于 N ，

$$\because \triangle MFP \sim \triangle NFQ,$$

$$\therefore \frac{PM}{PF} = \frac{QN}{QF}.$$

$$\text{再依据第(2)小题的结果，可得 } \frac{PF - \frac{3}{2}}{PF} = \frac{\frac{3}{2} - QF}{QF}.$$

$$\text{整理上式，得 } \frac{1}{PF} + \frac{1}{QF} = \frac{4}{3}.$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题